Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

Série de Exercícios 6

1 – O sistema de coordenadas ortogonais esféricas é $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$, segundo a figura anexa, onde φ equivale à longitude, θ à colatitude e r o módulo do vetor posição. As equações de transformação são: $x = x_1 = r\sin\theta\cos\varphi$; $y = x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$; $z = x_3 = r\cos\theta$.

a) Calcule os fatores de escala $h_r = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right\|, h_\theta = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right\|, h_\varphi = \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right\|$.

b) Exprima o elemento infinitesimal do vetor posição, ou seja $\overrightarrow{dr}$, em função dos versores das linhas coordenadas $\overrightarrow{e_r} = vers(\frac{\partial\vec{r}}{\partial r})$, $\overrightarrow{e_\theta} = vers(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta})$ e $\overrightarrow{e_\varphi} = vers(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi})$ e das variações infinitesimais $dr, d\theta, d\varphi$ das coordenadas curvilíneas esféricas.

c) Exprima os elementos de superfície ortogonais, respetivamente a $\overrightarrow{e_r}$, a $\overrightarrow{e_\theta}$, a $\overrightarrow{e_\varphi}$, em função de $dr, d\theta, d\varphi$. Calcule com base nessa expressão a área da calote polar terrestre que se estende de $\theta = 0$ (pólo Norte) a $\theta = \alpha$. Tome raio da Terra =R = 6370 km.

d) Exprima o elemento de volume em função de $dr, d\theta, d\varphi$.

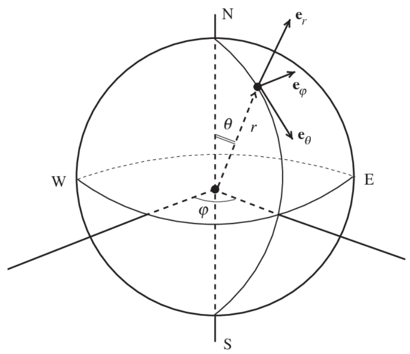
e) Calcule o volume no interior da calote polar referida na alínea c).

f) Exprima o gradiente de um campo escalar $\Psi(r,\theta,\varphi)$. Verifique como se particulariza esse para um campo zonalmente simétrico ou seja sem dependência na longitude φ.

g) Exprima a divergência de um campo vetorial $\vec{F} = F_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + F_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + F_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$. Particularize para o caso de um campo puramente radial $\vec{F} = F_r(r)\overrightarrow{e_r}$ e isotrópico.

h) Exprima o rotacional do campo vetorial $\vec{F} = F_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + F_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + F_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$.

i) Num campo de velocidades $\vec{v} = v_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + v_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + v_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$, as componentes v_r, v_θ, v_φ dizem-se as componentes vertical, meridional e zonal. Zonalmente simétrico diz-se do campo sem dependência em φ (equivalente à longitude). Considere então um campo de velocidades puramente zonal, zonalmente simétrico, i.e. $\vec{F} = F_\varphi(r,\theta)\overrightarrow{e_\varphi}$ e calcule a sua divergência e rotacional (vorticidade).



2) Um sistema de coordenadas ortogonais em 2D, vulgarmente usada em eletrostática é dado por: $q_1 = u = xy$; $q_2 = v = x^2 - y^2$.

a) Desenhe as linhas coordenadas.

b) Verifique que se trata de um sistema de coordenadas ortogonais.

c) Calcule os fatores de escala.

d) Calcule a expressão do gradiente de um campo escalar $\Psi(u,v)$.

e) Calcule a expressão da divergência de um campo vetorial $\vec{\mathrm{F}}(u,v)$ expresso na base $\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}$.